11/05/21

TEMA 11: CALCULO DE RAÍCES

BUSQUEDA DE RAÍCES

El probl. en la busqueda de raíces es encontrar los valores de x que cumplen que $f(x)=0$ ← Resolver esa ecuaø es buscar la raíz.

Los valores se llaman:

- Cero de $f(x)$ Cero de la funø
  Raíz de $f(x)=0$ Raíz de la ecuaø

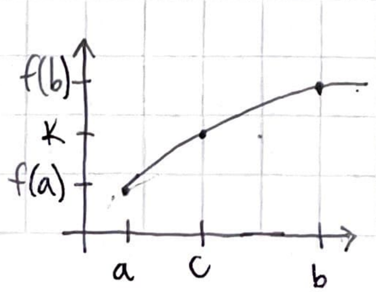
Siempre habrá 2 etapas:

1) Separar raíces: Puede que en una funø haya más de una raíz.
   Buscar un intervalo "pequeño" que contenga una sola raíz, la aislamos del resto de posibles raíces
2) Aproximamos el valor con la tolerancia deseada.

TEOREMAS

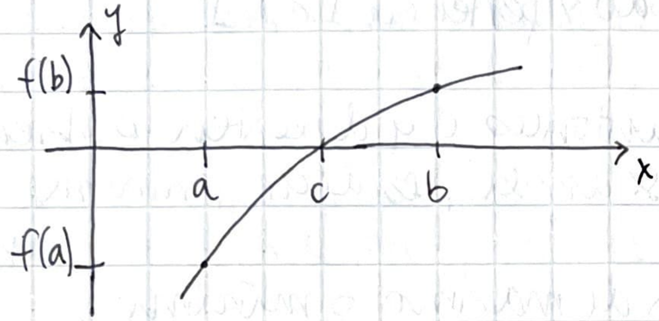
VALOR INTERMEDIO

Si f es continua $C[a,b]$ y K es un nº cualquiera entre f(a) y f(b) entonces va a existir un punto $c(a,b)$ en el interior del intervalo tal que $f(c)=K$



Si K es un nº cq entre f(a) y f(b), seguro que tiene una anteimagen, c tal que $f(c)=K$

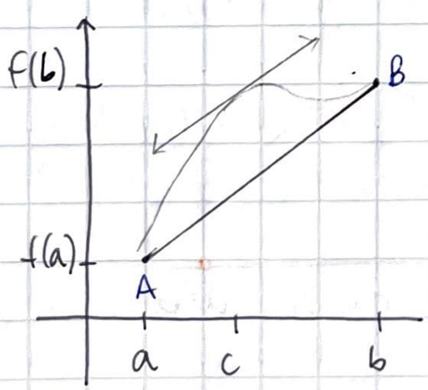
CORОLARIO: Si f es continua asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo, es decir $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces el intervalo contiene al menos una raíz. Habrá un c tal que $f(c) = 0$



VALOR MEDIO

Si f es continua $C[a,b]$ y f es diferenciable (derivable) en (a,b) entonces existe un c tal que $a < c < b$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Si f(x) entre A y B es continua y derivable, existe un punto en el que su tangencia, la recta tangente en ese punto sea paralela a la recta que está uniendo el punto A con el punto B.

La derivada de la func en ese punto $f'(c)$ es = a la pendiente de la recta tangente que pasa por los puntos A y B

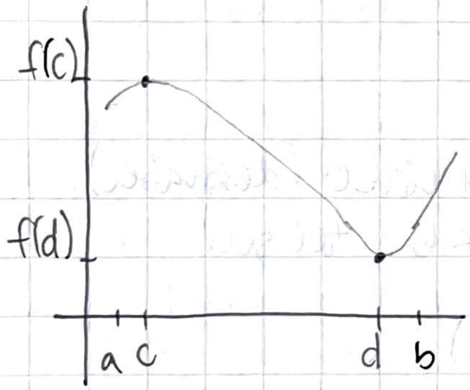
$(a, f(a))$ $(b, f(b))$

Si f es continua $C[a,b]$ existen c y d que pertenecen al intervalo cerrado $[a,b]$ tales que f(d) es el más pequeño de todos y f(c) es el más grande de todos.

$f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ para todo x pertenece $[a,b]$

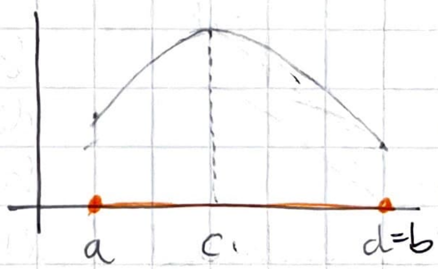
Y si además es derivable, entonces c y d existen o bien en los extremos o bien donde f' se anule, es decir, primera derivada = 0.

Ahí habían posibles puntos de máximo o mínimo.



Dada una func continua, a la fza existen 2 puntos (c y d) tal que f(c) es el máximo y f(d) es el + bajo.

En caso de ser diferenciable los numeros c y d existen ya sea en los extremos de α o donde la primera derivada se anula.



ALGORITMO DE BISECCIÓN Búsqueda binaria
Bolzano

Supongamos que tenemos una func continua f definida en un intervalo $[a,b]$, tal que $f(a)$ y $f(b)$ signos distintos.

Entonces por el corolario del teorema del valor intermedio sé que existe un c que pertenece (a,b) tal que $f(c)=0$.

¿CÓMO CALCULO ESE $c=0$?

1) Dividir a la mitad el intervalo y localizamos a la mitad que contiene a p.
   ↳ p es la raíz que buscamos, el c que buscamos

2) Sea $a_1 = a$ y $b_1 = b$,
   definimos $p_1 = (a_1 + b_1)/2$ punto medio

   Si $f(p_1) = 0$ lo hemos encontrado. PARAR.
   Si no, $f(p_1)$ tendrá el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$

3) Si $f(p_1)$ tiene mismo signo que $f(a_1) \to p \in (p_1, b_1)$
   Tomamos $a_2 = p_1$
   $b_2 = b_1$

   Si $f(p_1)$ tiene mismo signo que $f(b_1) \to p \in (a_1, p_1)$
   Tomamos $a_2 = a_1$
   $b_2 = p_1$

4) Repetir proceso con (a_2, b_2) hasta tolerancia.

Tolerancia

Nº max. de iteraciones N_0

$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$

$|f(p_n)| < \varepsilon$

$\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon$ ← Este usaremos

Ejemplo bisección: Con una tolerancia de 10^{-4}, la func tiene una raíz en $[1,2]$

Tolerancia: $\dfrac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < 10^{-4}$

La func $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1,2]$

- Compruebo que es una func polinómica, continua
- Compruebo los extremos, si tienen ≠ signo, perfecto

$f(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 10$ $\qquad$ $f(2) = 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 10$

-5 $\qquad$ 14

- Como $f(a)$ es negativo y $f(b)$ es posit. existe $f(c) = 0$

- Construimos tabla con:
  - Nº iteraciones
  - a_n extremo izq.
  - b_n extremo der
  - p_n aproximación
  - $f(p_n)$ valor de f en aproximación
  - Tolerancia

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

n	a_n −	b_n +	p_n	$f(p_n)$	$\frac{\lvert p_n - p_{n-1}\rvert}{\lvert p_n\rvert}$
1	1	2	1,5	2,375	
2	1	1,5	1,25	−1,796875	0,2 → $\frac{\lvert 1,25 - 1,5\rvert}{\lvert 1,5\rvert}$
3	1,25	1,5	1,375	0,162109375	0,1
4	1,25	1,375	1,3125	−0,84839	0,0454545
5	1,3125	1,375			
6					
7					
8					
9					

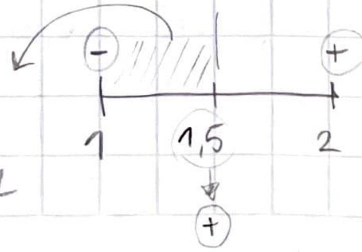
Sé que f(1) es negativo y f(2) es positivo

Calculo punto medio: $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Reemplazo 1,5 en f para calcular $f(p_n)$

$(1,5)^3 + 4(1,5)^2 - 10 = 2,375$ → es positivo

Aquí estará la raíz



la raíz estará en alguno de los 2 lados. 1 es neg, 2 es pos. y 1,5 posit. La raíz estará entre el positivo y negativo. Me puedo deshacer del otro

X = 1,365230013

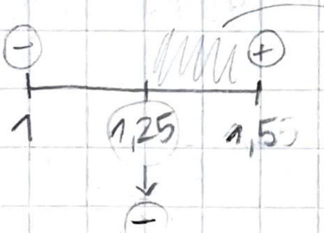
Como 1,5 es positivo lo pongo en la tabla en la iterac 2 debajo de lo que era el signo positivo (en bn, debajo del 2). y mantengo el extremo a.

Todavía no puedo calcular error xq necesito 2 aproximac.

Voy con segunda iterac, ahora intervalo [1 , 1,5]
Se que 1 es negat. y 1,5 es posit., existe entre medio una raíz.

Calculo $p_n = \frac{1 + 1,5}{2} = 1,25$

$f(1,25) = (1,25)^3 + 4(1,25)^2 - 10 = -1,796875$ → negativo



la raíz estará entre negat. y posit. entre 1,25 y 1,5

Como −1,796875 es negat. lo paso a la col. de los negativos, o sea, el 1,25 lo pongo en col. a y bajo el 6.

Ya tengo 2 aproximac y puedo calcular el error

iterac	col p_n
1	1,5
2	1,25

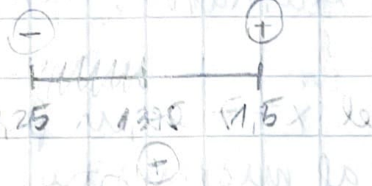
Error $\frac{|P_2 - P_1|}{|P_1|}$ $\quad \frac{|1,25 - 1,5|}{|1,5|}$

$\frac{0,25}{1,5} = 0,2$

Es menor que 10^{-4}? No, tengo que seguir.

Tercera iteración: Punto medio: $(1,25 + 1,5)/2 = 1,375$

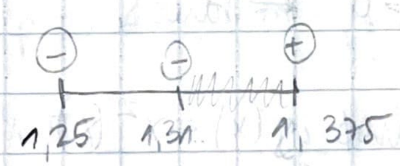
$f(1,375) = (1,375)^3 + 4(1,375)^2 - 10 = 0,162109375$ → Positivo



Error: $\dfrac{|1,375 - 1,25|}{|1,25|} = 0,1$

Cuarta iteración $(1,25 + 1,375)/2 = 1,3125$

$f(1,3125) = (1,3125)^3 + 4(1,3125)^2 - 10 = -0,84839$ → NEG



Error: $\dfrac{|1,3125 - 1,375|}{|1,375|}$

$0,0454545454 5$

Se hacen hasta 13 iteraciones, cuando el error es menor que 10^{-4} y la raíz (p_n es 1,365112305)

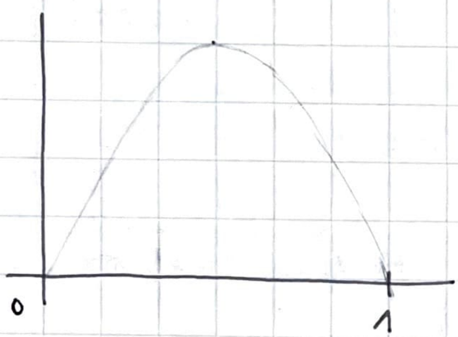
ALGORITMO DE PUNTO FIJO

A una solución de la ecuación $g(x) = x$ le llamamos PUNTO FIJO de la función g.

Si meto un 7 en $g(x)$ y $g(7) = 7$, el $x = 7$ es un punto fijo de g, porque al aplicarle la función vuelve al mismo sitio.

Si $g(x)$ es de la forma $g(x) = x - f(x)$ los puntos fijos de g coinciden con las raíces de f.

Ejemplo: $f(x) = x - x^2 \longrightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \leftarrow$ raíces



Si tengo una función $g(x) = x - f(x)$

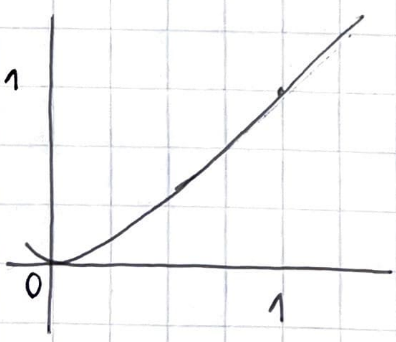
$g(x) = x - x + x^2$

$g(x) = x^2$

$\downarrow$

los puntos fijos de g van a coincidir con las raíces de f

g tendrá puntos fijos 0 y 1



$g(1) = 1$

$g(0) = 0$

ITERACIÓN PUNTO FIJO - ITERACIÓN FUNCIONAL

1) Escoger una aproximaø inicial p_0
Generar suceø $\{p_n\}$ tomando $p_n = g(p_{n-1})$

p_1 es $g(p_0)$
p_2 es $g(p_1)$
A c/ pto que obtengo aplico g.

Si la suceø converge a p y g es continua,
p es el punto fijo de $g \rightarrow p$ es raíz de f.

YOUTUBE: Andrés Aristabal

Resolver: $x^3 + x = 6$

1. IGUALAR ECUACIÓN A 0 $x^3 + x - 6 = 0$

1) Determinar intervalo de confianza: tabla y ver donde cambia de signo.

x	f(x)
-4	-74
-3	-36
-2	-16
-1	-8
0	-6
1	-4
2	4
3	24
4	62

$(-4)^3 + (-4) - 6$
$(-3)^3 + (-3) - 6$

CAMBIA SIGNO: Intervalo $[1, 2]$

Obtener punto medio del intervalo:

$\frac{1+2}{2} = 1,5$

2) Hallar los posibles despejes de x

$x^3 + x - 6 = 0$

$x^3 = -x + 6$

$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-x+6}$ $\quad x = \sqrt[3]{-x+6}$ $\quad x = (-x+6)^{1/3}$

$x = (6-x)^{1/3}$

$x^3 + x - 6 = 0$

$x = -x^3 + 6$ $\quad x = 6 - x^3$

3) Derivar cada despeje

a) $g(x) = (6-x)^{1/3}$ $\qquad g'(x) = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6-x)^2}} = \frac{-1}{3(6-x)^{2/3}}$

$g(x) = \sqrt[3]{(6-x)}$

b) $g(x) = 6 - x^3$ $\qquad g'(x) = 0 - 3x^2$ $\qquad g(x) = -3x^2$

4) Reemplazar punto medio del intervalo de confianza. El que cumpla que $g'(x)$, su resultado esté entre -1 y 1 será apto para iterar $\quad -1 \leq g'(x) \leq 1$

Reemplazamos 1,5 en las derivadas que calculamos

a) $g'(x) = \dfrac{-1}{3(6-x)^{2/3}} = \dfrac{-1}{3(6-1{,}5)^{2/3}} = -0{,}122293601$

$\downarrow$

Está entre -1 y 1

b) $g'(x) = -3x^2 = -3(1{,}5)^2 = -6{,}75 \rightarrow$ No está entre -1 y 1

5) Iterar con el despeje apto

Reemplazo punto medio

$g(x) = (6-x)^{1/3}$ $\qquad G(x) = (6-(1{,}5))^{1/3} = 1{,}650963624$

$\downarrow$

Col. G(x) iterado 0

Construyo tabla de iteraciones

i	x	$G(x)$	$[x_i - x_{i-1}]$
0	1,5 (Punto medio)	1,650963624	0
1	1,650963624	1,632291353	-0,018672271
2	1,632291353	1,634624059	$2{,}330529 \cdot 10^{-3}$
3	1,634624059	1,63463001	0,013934193
4	1,63463001	1,63469323	$3{,}9313 \cdot 10^{-5}$
5	1,63469323	1,63466479	-0,00032844
6	1,63466479	1,63465356	$5{,}66 \cdot 10^{-7}$
7	1,634665356	1,63465285	-0,000000071
8	1,63465285	1,63465294	$1{,}4 \cdot 10^{-8}$
9	1,63465294	1,63465293	-0,000000001
10	1,63465293	1,63465293	0

Reemplazo ese valor en la func

$6-(1{,}65096\ldots))^{1/3}$

y así lleno todo

Resta iterado 1 − iterado 0 de G(x)

$-1{,}6322 - 1{,}6509\ldots$

$\downarrow$

hasta llegar a 0

Col. x 1° pto medio luego copio G(x)

Al llegar a 0, el valor de G(x) es el punto fijo.

6) Reemplazar en la func original el pto fijo que encontramos

$$x^3 + x = 6$$

$$(1{,}63465293)^3 + 1{,}63465293 = 6$$

$$6 = 6$$

17/05/21

CLASE 11, PARTE 2: CÁLCULO DE RAÍCES

MÉTODO DE LA SECANTE (Partes proporcionales)

- Se aplica método de bisección
- En vez de dividir intervalo x la mitad, como en bisecc se divide así: $-f(a) : f(b)$
- Valor aprox. de la raíz será

$$p_1 = a + h_1 = b - \tilde{h}_1$$

$$\boxed{h_1 = -\frac{f(a)}{-f(a)+f(b)}(b-a)} \qquad \boxed{\tilde{h}_1 = \frac{f(b)}{-f(a)+f(b)}(b-a)}$$

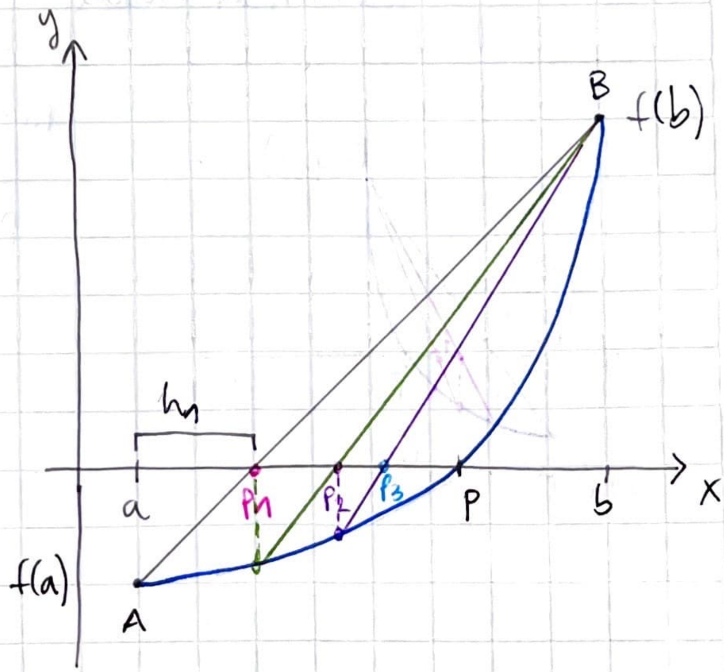
¿Cómo saber cuál formula aplicar? Depende del trozo donde esté la raíz

Geometricamente

Sustituye la curva $y = f(x)$ por una cuerda que pasa x puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$

Uno pto A y B con una recta. Donde la recta corta a eje x, es mi primer punto p_1

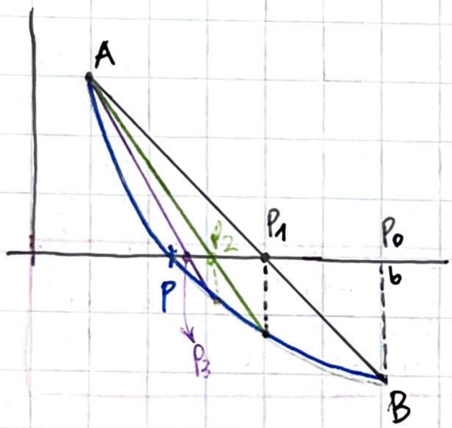
Desde p_1 trazo recta hasta chocar con la func y trazo otra recta



En este caso B queda fijo y A se mueve.
En donde la 2ª recta choca con eje x es p2 y así se continua y se genera una suceso que va a converger a p.

DOS CASOS DIFERENCIADOS

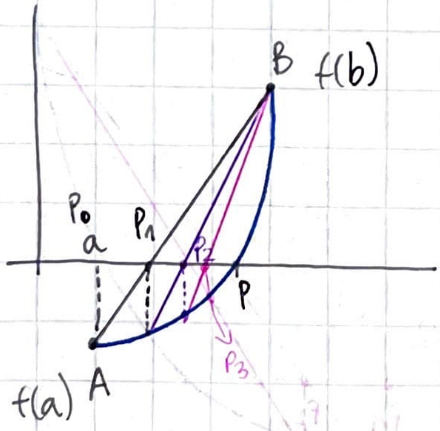
$f(a) > 0 \rightarrow$ Extremo A está fijo



Como b se mueve, tomamos como $p_0 = b$ y la suced que se genera es esta:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(p_n) - f(a)} (p_n - a)$$

$f(a) < 0 \rightarrow$ Extremo fijo es B, entonces tomo a A de aproximaso inicial



$p_0 = a$

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f(b) - f(p_n)} (b - p_n)$$

Ejemplo : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ Tolerancia error relativo: $4 \cdot 10^{-4}$

0,0004

1) Buscar el intervalo y aislar una raíz

$f(1,3) = -1,043 < 0$ $f(1,4) = 0,584 > 0$

Estamos en el caso de $f(a) < 0$, por lo que la formula es:

$p_0 = a = 1,3$ $\underbrace{p_{n+1}}_{p_1} = \underbrace{p_n}_{p_0} - \dfrac{f(p_n)}{f(b) - f(p_n)} (b - p_n)$

$p_0 = 1,3$ $p_1 = 1,3 - \dfrac{-1,043}{0,584 - (-1,043)} (1,4 - 1,3) = 1,364105716$

Error $\left| \dfrac{p_1 - p_0}{p_1} \right| = \left| \dfrac{1,36410576 - 1,3}{1,36410576} \right| = 0,0469$ → mayor a tolerancia sigo iterando

Iteración 2

$f(1,364105716) = -0,018557390$

$p_2 = p_1 - \dfrac{f(p_1)}{f(b) - f(p_1)} (b - p_1)$

$p_2 = 1,364105716 - \dfrac{(-0,018557390)}{0,584 - (-0,018557390)} (1,4 - 1,364105716)$

$p_2 = 1,365211083$

Error: $\left| \dfrac{1,365211083 - 1,364105716}{1,365211083} \right| = 8 \cdot 10^{-4}$ > tolerancia

Iteración 3

$f(p_2) = f(1{,}3652\,11083) = 0{,}00031260885$

$$P_3 = P_2 - \frac{f(p_2)}{f(b) - f(p_2)} (b - p_2) = 1{,}3657460857$$

$$\text{Error: } \left| \frac{1{,}3657460857 - 1{,}365211083}{1{,}3657460857} \right| = 4 \cdot 10^{-4} \checkmark$$

Finaliza el método

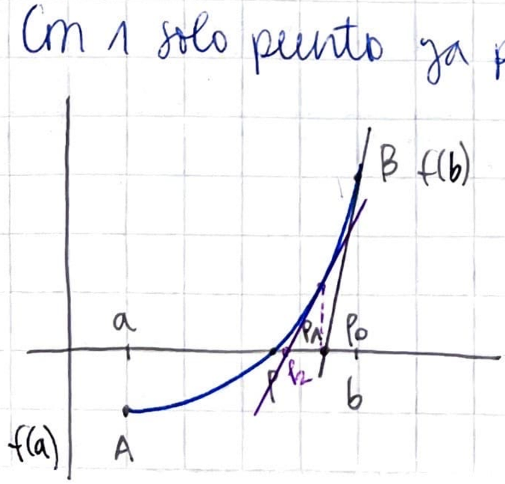
El ultimo p hallado será la aproximación a la raíz que buscamos, en este caso p3

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON (método de la tangente)

Implica generar la sucesión

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Con 1 solo punto ya puedo arrancar el método



Sustituimos un arco pequeño de la curva $y = f(x)$ por una tangente trazada por un punto de la curva.

$b = p_0$

Tomo un punto inicial, en este caso $b = p_0$ y trazo la tangente en el punto B. Y donde corta al eje x es el sgte punto.

Desde p_1 subimos a la func y donde choca, se traza otra tangente y donde corta al eje x es p_2 .... y así

ES un metodo muy local y se necesita una muy buena aproximac inicial p que funce bien

TEOREMA

Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ y $f'(x)$ y $f''(x)$ son no nulas y conservan el signo para $a \leq x \leq b$, entonces a partir de la aproximac inicial $p_0 \in [a,b]$ que satisface

$$f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$$

una buena aproximac cumplirá que $f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$

Este metodo obliga a calcular la segunda derivada y evaluarla.

No usar el metodo si $f(x)$ es casi horizontal.

Ejemplo: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Raíz en intervalo $[1,2]$

Aproximac inicial: 1,5

Tolerancia 10^{-4}

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tolerancia $10^{-4} = 0,0001$

intervalo [1,2]

Aprox inicial $1,5 \rightarrow P_0$

$f(1) = -5$ $f(2) = 14$

Necesito la derivada: $f'(x) = 3x^2 + 8x$

$P_0 = 1,5$

$f(1,5) = 2,375$

$f'(1,5) = 18,75$

Aplico fórmula

$$P_1 = P_0 - \frac{f(P_0)}{f'(P_0)} \qquad 1,5 - \frac{2,375}{18,75} = 1,373333333$$

$$\text{Error: } \left| \frac{P_1 - P_0}{P_1} \right| \qquad \left| \frac{1,373333333 - 1,5}{1,373333333} \right| = 0,092233$$

Iteración 2

$$P_2 = P_1 - \frac{f(P_1)}{f'(P_1)}$$

$f(1,373333333) = 0,134354759$

$f'(1,373333333) = 16,64479999$

$$P_2 = 1,373333333 - \frac{0,134354759}{16,64479999} = 1,365262015$$

$$\text{Error: } \left| \frac{P_2 - P_1}{P_2} \right| \qquad \left| \frac{1,365262015 - 1,373333333}{1,365262015} \right| = 0,02209$$

Iterad 3 Se sigue hasta la tolerancia que se pide

$P_3 = 1,365230014$

24/05/21

TEMA 12 : PARTE 1

Calculo de raíces

METODO DE LA SECANTE MODIFICADO

Es una variad de Newton Raphson

El metodo de Newton Raphson era: $P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$

Es complicado si la deriada no existe o es muy dificil.

Busco un mecanismo p variar este método p no tener q calcular la deriada.

Vamos a la definiz de derivada: lim. cdo x tendía hacia el punto de $f(x) - f(P_{n-1})$ partido la distancia

$$\lim_{x \to P_{n-1}} \frac{f(x) - f(P_{n-1})}{x - P_{n-1}}$$

Si sustituimos ese limite en el valor de la derivada y hacemos $x = P_{n-2}$ obtenemos el metodo de la secante modificado

$$\boxed{P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f(P_{n-1}) - f(P_{n-2})} (P_{n-1} - P_{n-2})}$$

Aquí ya no hay derivadas, hemos sustituido la derivada por un valor de un punto. Ya no es necesario calcular derivadas.
Necesitamos 2 puntos p' empezar

Newton Raphson

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$$

Evaluar derivada
Calculos + complicados
1 aproximaø inicial
Convergencia + rapida

Secante modificado

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f(P_{n-1}) - f(P_{n-2})}(P_{n-1} - P_{n-2})$$

No evalua derivada
Calculos + faciles
2 aproximaøes iniciales
Convergencia + lenta

METODO DE NEWTON MODIFICADO

Se basa tb. en Newton Raphson $P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$

En Newton modificado se sustituye $f'(P_n)$ por $f'(P_0)$. Evito hacer la evaluaø de la derivada en c/pto. Se hace solo 1 vez, la primera y ese valor es el que sustituyo → Formula de von Mises

Sustituir $f'(P_n) = f'(P_0)$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_0)}$$ ⇒ FÓRMULA VON MISES

Se calcula la derivada 1 sola vez en el 1^er punto de iteraø.

Geometricamente: Es sustituir las tangentes por líneas paralelas a las tangentes (porque la derivada es la misma).

TOLERANCIA PARA AMBOS MÉTODOS

Error relativo $\frac{|P_n - P_{n-1}|}{|P_n|} < \varepsilon$

CONVERGENCIA

Sea una suceσ $P_n \to P$ (P_n que tienda a P) y sea e_n el error $= P_n - P$,

Si existen λ y α positivos tales que cumplen que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|P_{n+1} - P|}{|P_n - P|^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\alpha}} = \lambda$$

decimos que P_n (esta suceσ de valores que aproximan) converge a p de orden α y con una constante de error asintótico λ.

Velocidad de convergencia de orden	Denominación
1	Convergencia lineal
1 < orden < 2	Convergencia superlineal
2	Convergencia cuadrática
2 < orden < 3	Convergencia supercuadrática
3	Convergencia cúbica

Método	Convergencia
Bisección	Lineal
Punto Fijo	Depende de la func
Secante	Superlineal $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$
Secante modificado	Lineal / Cuadrática
Newton Raphson	Cuadrática

Ejemplo:

Sea $f(x) = e^x - x - 1$ Raiz en 0 Tiene una raiz cercana a $x=0$

Aplicamos Newton Raphson con $P_0 = 1$ $P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$

Raiz en 0 $= e^0 - 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$

n	P_n
0	1
1	0,58198
2	0,31906
3	0,16800
4	0,08635
5	0,04380
6	0,02206
7	0,01107
8	0,005545

$f(1) = 0,718281828 5$ (A)

$1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(1) = 1,718281828$ (B)

$1,5819767069$ (C)

$0,5819 - \frac{f(0,5819)}{f'(0,58198)} = \frac{0,20759}{0,7895} = 0,31906$

Se va reduciendo a la mitad, eso es convergencia lineal.

Pero se había dicho que Newton Raphson tenía convergencia cuadrática. ¿Qué pasa?

Ocurre que converge cuadráticamente p/ raíces simples. Si la raíz tiene multiplicidad más de 1, no converge de manera cuadrática.

P es cero de $f(x)$ de multiplicidad m si

$$f(x) = (x-p)^m \cdot q(x) \text{ con } \lim_{x \to p} q(x) \neq 0$$

MÉTODO DE NEWTON GENERALIZADO

Es un método p/ el cálculo de raíces múltiples.
Aplicamos iterado de punto fijo a

$$g(x) = x - \frac{f(x) \cdot f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}$$

Convergencia cuadrática independiente/. de la multiplicidad de la raíz.

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \quad (x-3)^2(x+1) = 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

Si me quiero acercar a -1 aplico Newton sin más.
Pero si me quiero acercar al 3 hay que aplicar la formula

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad g(x) = x - \frac{f(x) \cdot f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}$$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x-3)^2(x+1)$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{(P_n-3)(P_n+1)}{(3P_n-1)}$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{(P_n-3)(P_n+1)(3P_n-1)}{(3P^2n + 2P_n + 11)}$$

$$f(x) = (x-3)^2(x+1)$$

$$f'(x) = 2(x-3)(x+1) + (x-3)^2(1)$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

??

$$x = \frac{(x-3)^2(x+1)}{2(x-3)(x+1) + (x-3)^2}$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(2x+2) + (x-3)} = x - \frac{(x-3)(x+1)}{3x-1}$$

$$2(x-3)(x+1) + (x-3)(x-3)$$

$$(x-3)\left(2(x+1) + x - 3\right)$$

$$\frac{(x-3)^2(x+1)}{\cancel{(x-3)}(2(x+1) + x - 3)} = \frac{(x-3)(x+1)}{2x+2+x-3}$$

$$x - \frac{(x-3)(x+1)}{3x-1}$$

$$(x-3)(x-3)$$

$$f'(x) = (2x-6)(x+1) + (x-3)^2 \qquad x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

$$2x^3 + 2x - 6x - 6 + x^2 - 6x + 9$$

$$2x^3 + x^2 - 10x + 3 \qquad x(2x^2 + x - 10) + 3$$

$$x(x(2x+1) - 10) + 3$$

$$f''(x) = 6x^2 + 2x - 10$$

$$x - \frac{(x-3)^2(x+1) \cdot 2(x-3)(x+1) + (x-3)^2}{[2(x-3)(x+1) + (x-3)^2]^2 - (x-3)^2(x+1) \cdot x(2x^2 + x - 10) + 3}$$

??

Como me quiero acercar a $x=3$, mi aprox. inicial, $P_0 = 2,5$

1	2,5
2	2,959595960
3	2,999791764
4	2,999999995
5	3,000000000

31/05/21

TEMA 12: PARTE II
Técnicas de aceleración

Técnicas que aceleran la convergencia de ≠ métodos ya visto.

Δ^2 DE AITKEN

Acelera una convergencia que sea lineal, independiente de su origen.
Vale para CUALQUIER MÉTODO.

$$\boxed{\hat{P}_n = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}}$$

Para conseguir $\hat{P}_n$ necesito P_n, P_{n+1} y P_{n+2}, 3 iterados. Pueden ser iterados de cualquier método, 3 iterados consecutivos de cualquiera de los métodos ya visto y consigo una única iterado $\hat{P}_n$.